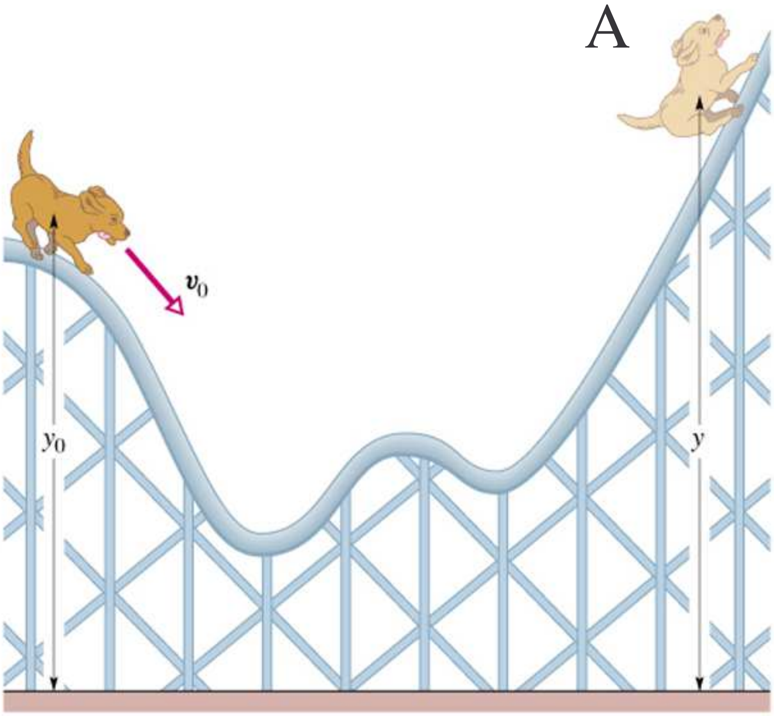
Conservazione dell'energia



Agisce solo la gravità, trascuriamo l'attrito

Per calcolare la velocità nel punto A per mezzo del II principio della dinamica, oltre a conoscere la velocità iniziale v_0, è anche necessario conoscere accuratamente la curvatura della slitta. I conti inoltre sono estremamente complessi poiché la forza agente sul corpo cambia in ogni punto, cambiando la curvatura della rotaia.

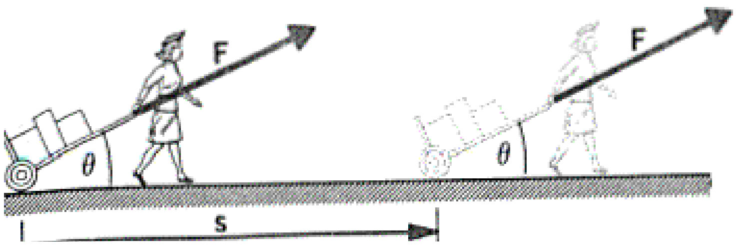
Esiste una scorciatoia ?

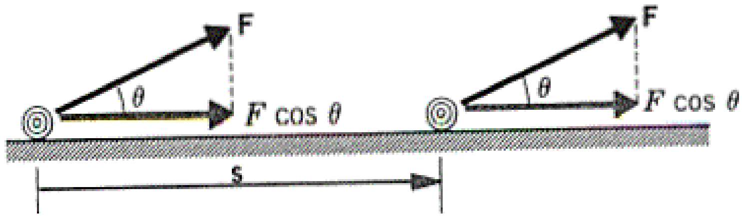
Lavoro ed Energia

Il concetto di lavoro intuitivamente quantifica la "fatica" che una persona, o una macchina, devono fare per spostare un oggetto.

Maggiore è lo spostamento del corpo, o maggiore è la forza impiegata per spingere, maggiore sarà la fatica e dunque intuitivamente dovrà essere maggiore il lavoro compiuto.

Intuitivamente il lavoro dovrà quindi essere legato sia allo spostamento che all'intensità della forza





E' chiaro che la componente della forza che 'lavora' è quella che induce direttamente lo spostamento, cioè quella parallela alla spostamento

$$dL = \overline{F} \cdot \overline{ds} \qquad\qquad dL = \left|\overline{F}\right|\left|\overline{ds}\right|\cos(\theta)$$

Il lavoro infinitesimo dL fatto da una forza **F** per spostare un corpo di un tratto **ds** si definisce come il **prodotto scalare** tra la forza e lo spostamento

Il lavoro:

- E’ uno scalare (un numero), cioè non è caratterizzato da una direzione o da un verso
- E’ nullo se la forza è nulla
- E’ nullo se lo spostamento è nullo ➔ Appoggiarsi ad una cassa che rimane ferma non corrisponde ad alcun lavoro
- E’ nullo se lo spostamento è perpendicolare alla forza (la forza di Lorentz è a lavoro nullo)
- E’ positivo se la forza è parallela allo spostamento (lavoro motore)
- E’ negativo se la forza è opposta allo spostamento (lavoro resistente)

Il lavoro si misura in Joule (Newton • metro):

$$Lavoro = [F][s] = \frac{[kg][m]}{[s]^2}[m] = \frac{[kg][m]^2}{[s]^2} = [J] = Joule$$

La definizione si può semplificare in alcuni casi particolari (solo in questi !!)

Caso 1D $\Rightarrow$ Non è più necessario il prodotto scalare dL = Fds

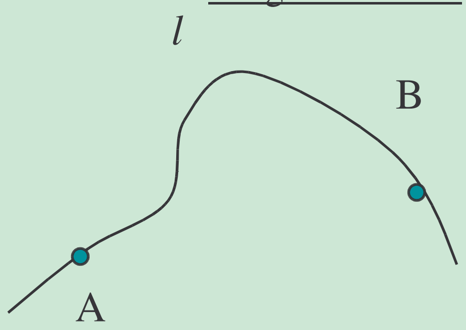
Spostamento Rettilineo

+ $\Rightarrow$ Si può passare alla forma integrale L = F s cos(θ)

Forza costante

In tutti gli altri casi per calcolare il lavoro è necessario risolvere un <u>integrale di linea</u>

$$L = \int_{l(A,B)} \overline{F} \cdot \overline{ds}$$



Il lavoro è la conseguenza dell'applicazione di una forza, la quale, per il II principio della dinamica, comporta un'accelerazione. Ad esso deve quindi essere associata una variazione di velocità.
Il calcolo del lavoro secondo la definizione implica un processo di integrazione che è, il più delle volte, lungo e complesso.

Tuttavia per una forza costante e | | allo spostamento:

$$\overline{F} = m\overline{a}$$

$$L = \overline{F} \cdot \overline{s} = Fs = m\overline{a} \cdot \overline{s} = mas$$

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad (Vero\ \ per\ un\ moto\ \ unif.\ \ accelerato)$$

$$L = m\frac{(v^2 - v_0^2)}{2} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2$$

$$\frac{1}{2}mv_A{}^2 \Rightarrow Energia\ \ Cinetica\ \ in\ \ A \Rightarrow E_{cin,A}$$

Il lavoro L fatto da una forza F costante per portare un corpo di massa m dal punto A al punto B può essere espresso dalla differenza dell'energia cinetica calcolata in B ed in A

Il lavoro è la conseguenza dell'applicazione di una forza, la quale, per il II principio della dinamica comporta un'accelerazione. Ad esso deve quindi essere associata una variazione di velocità.
Il calcolo del lavoro secondo la definizione implica un processo di integrazione che è il più delle volte lungo e complesso.

In generale:

$$dL = \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

$$dL = \overline{F} \cdot \frac{\overline{ds}}{dt} dt = \overline{F} \cdot \overline{v}\, dt = m \frac{\overline{dv}}{dt} \cdot \overline{v}\, dt = m \cancel{\frac{dv}{dt} v\, dt = mv \frac{dv}{dt}} dt = m \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} v^2\right) dt$$

$$dL = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}\left(v^2\right) dt = \frac{1}{2} m\, d\left(v^2\right)$$

$$L = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Il lavoro L fatto da una **qualsiasi** forza F per portare un corpo di massa m dal punto A al punto B può essere espresso dalla differenza dell'energia cinetica calcolata in B ed in A

Teorema del lavoro e dell'energia cinetica (o delle forze vive)

Quando una forza risultante non-nulla compie un lavoro L su un corpo, l'energia cinetica del corpo varia dal suo valore iniziale $E_{cin,0}$ al valore finale $E_{cin,f}$ e la differenza fra l'energia cinetica finale e quella iniziale è uguale al lavoro compiuto dalla forza.

L'unità di misura dell'energia cinetica è ovviamente il Joule

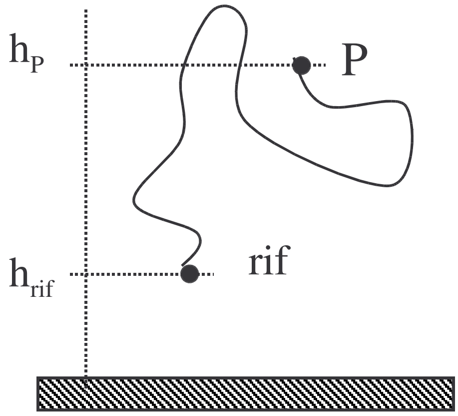
Nel caso di una forza semplice come la forza peso F=- mg **j** il lavoro risulta essere

- indipendente dalla traiettoria
- legato solo alla quota iniziale e finale

Noti cioè due punti A e B qualsiasi è possibile conoscere il lavoro necessario per andare da A a B semplicemente con la formula $mg(h_B-h_A)$

Energia Potenziale

Per la forza peso è quindi possibile costruire, in ogni punto dello spazio, una funzione energia potenziale U(P). L'Energia potenziale di una massa m in un punto P è definita come l'opposto del lavoro necessario per portare la massa m da punto di riferimento precedentemente determinato a cui si associa energia potenziale nulla, al punto P.



$$\overline{F} = -mg\,\hat{j}$$

$$L_{rif-P} = -mg(h_p - h_{Rif})$$

$$U(P) = -L_{rif-P}$$

$$U(P) = -[-(mgh_P - mgh_{rif})] = mgh_P - 0 = mgh_P$$

Poiché per la forza peso il lavoro non dipende dalla traiettoria ma unicamente dalla posizione di partenza e da quella di arrivo allora l'Energia Potenziale è univocamente definita in ogni punto dello spazio

Forze Conservative

Se il lavoro compiuto da una forza nello spostare un corpo da una posizione ad un altra è indipendente dal cammino percorso, la forza è detta conservativa

Poiché in un campo conservativo il lavoro fatto per andare dal punto A al punto B non dipende dal percorso fatto è possibile immaginare una traiettoria che va punto A al punto di riferimento per il calcolo del potenziale e da questo al punto P.

$$L_{A \to P} = L_{A \to rif} + L_{rif \to P}$$

$$L_{A \to P} = -L_{rif \to A} + L_{rif \to P}$$

$$L_{A \to P} = -(-U(A)) - U(P) = -\left(U(P) - U(A)\right)$$

Quindi l'opposto della differenza del valore dell'energia potenziale calcolata nel punto P e nel punto A fornisce il lavoro necessario per portare un corpo dal punto A al punto P.

Per calcolare il lavoro quindi la fisica ha a disposizione tre differenti tecniche:

- La prima mediante, la definizione, implica una processo di integrazione in più dimensioni che spesso può essere complesso o non risolvibile analiticamente.

$$L = \int_{l(A,B)} \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

- La seconda per mezzo del teorema del Lavoro e dell'Energia Cinetica, banale se si conoscono le velocità iniziale e finale.

$$L = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

- La terza, nell'ipotesi di forza conservativa, per mezzo dell'energia potenziale.

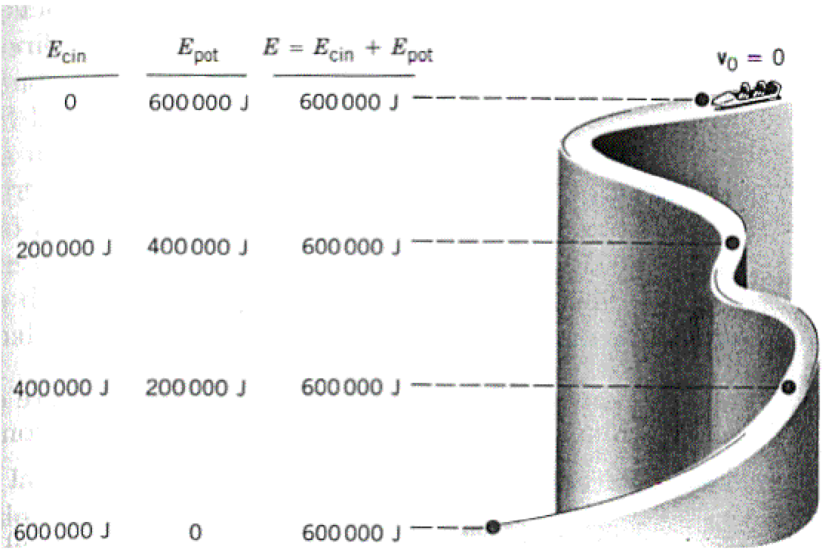
$$L = -(U(B) - U(A))$$

In questa ultima tecnica è necessario sapere SOLO ed ESCLUSIVAMNTE il valore dell'energia potenziale nei due punti A e B.

L'energia cinetica e l'energia potenziale sono quindi due quantità molto legate tra loro infatti entrambe esprimono il lavoro fatto per andare tra due punti A e P

$$L_{A \to P} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{cin,P} - E_{cin,A}$$
$$L_{A \to P} = -(U(P) - U(A))$$

$$E_{cin,P} - E_{cin,A} = -(U(P) - U(A)) = -U(P) + U(A)$$
$$\text{===>}\ E_{cin,P} + U(P) = E_{cin,A} + U(A)$$



Un corpo in caduta a mano a mano che diminuisce di quota aumenta di velocità ma diminuisce di energia Potenziale

In altre parole è come se l'energia potenziale si trasformasse in energia cinetica

Principio di conservazione dell'energia (meccanica)

La somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica possedute da un corpo in un punto P si dice Energia Meccanica.

L'Energia Meccanica di un corpo, in un sistema isolato, si conserva in ogni punto della sua traiettoria

La forza peso ha la proprietà che il lavoro compiuto non dipende dalla scelta del cammino percorso

- E' stato possibile definire l'Energia Potenziale
- E' stato possibile definire l'Energia Meccanica
- E' valido il principio di conservazione dell'Energia meccanica

Forze Conservative

Se il lavoro compiuto da una forza nello spostare un corpo da una posizione ad un altra è indipendente dal cammino percorso, la forza è detta conservativa

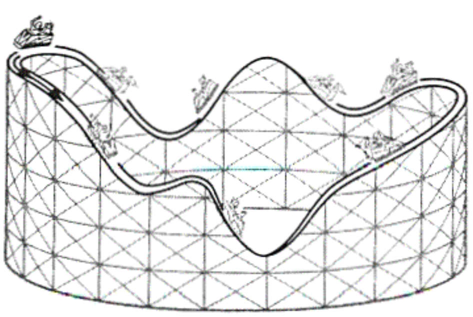
Per una forza conservativa è quindi possibile definire la funzione Energia Potenziale

Energia Potenziale

Per una forza conservativa e' quindi possibile costruire, in ogni punto dello spazio una funzione, Energia potenziale U(P). L'Energia potenziale in un punto P è definita come l'opposto del lavoro necessario per portare il corpo da un punto di riferimento precedentemente determinato al punto P.

$$U(P) = -\int_{rif-P} \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

Ogni forza conservativa ha la proprietà che il lavoro che essa compie su un corpo lungo un cammino chiuso è nullo



Esempi di forze conservative

Forza Peso: $\overline{F} = -mg\ \hat{j}$ $\qquad U(P) = mgh_P$

Forza Elastica: $\overline{F} = -kx\ \hat{i}$ $\qquad U(P) = \frac{1}{2}kx_p^2$

Forza Gravitazionale: $\overline{F} = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\ \hat{r}$ $\qquad U(P) = -G\frac{m_1m_2}{r_p}$

Forza Elettrostatica: $\overline{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\ \hat{r}$ $\qquad U(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_p}$

Non tutte le forze sono conservative, una forza è non conservativa se il lavoro che compie su un corpo dipende dal cammino percorso (p.es. la forza di attrito)

Potenza

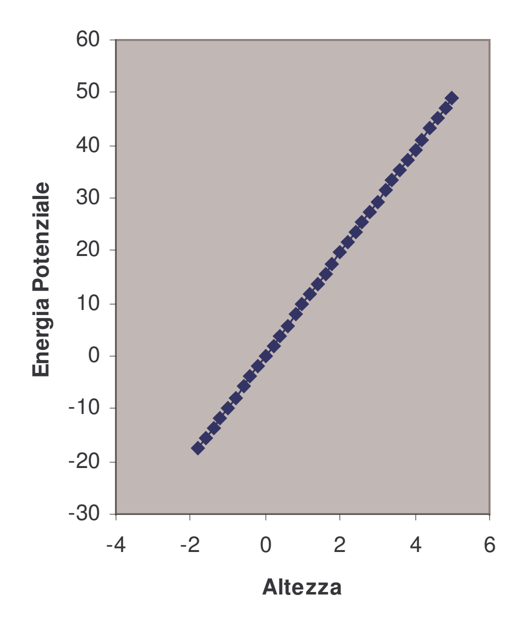
La potenza è la rapidità con cui viene compiuto il lavoro L ed è definita come la derivata del lavoro rispetto al tempo

$$P = \frac{dL}{dt} \qquad [P] = Watt = \frac{[kg][m]^2}{[s]^3}$$

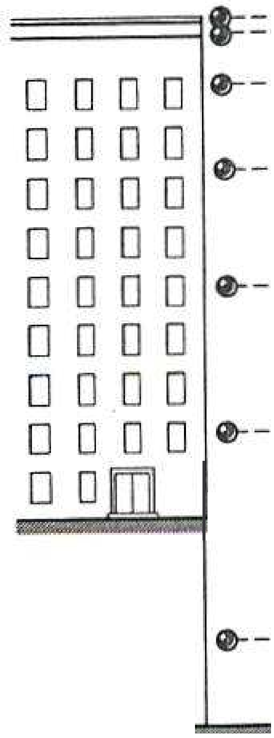
Curve di Potenziale

E’ possibile mettere in grafico l’andamento del potenziale di una data forza

Forza Peso
m = 1 kg
g = 9.8 m/s²



$$U(h) = mgh$$



L’Energia Potenziale della forza peso è una funzione lineare dell’altezza. Maggiore è l’altezza maggiore è l’energia potenziale

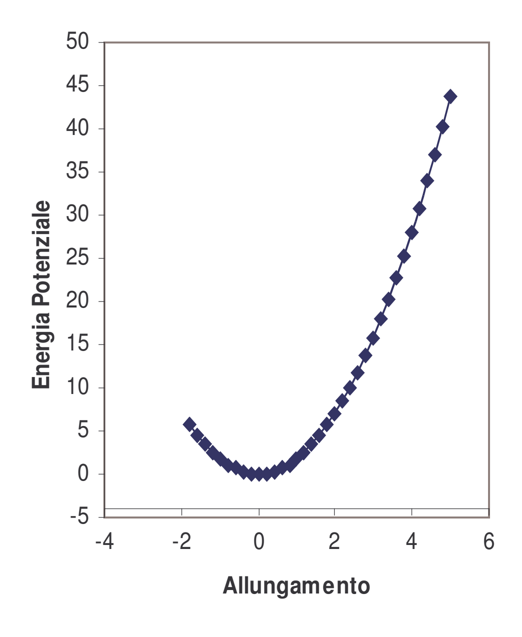
.

Ovviamente la forza peso non ha punti di equilibrio

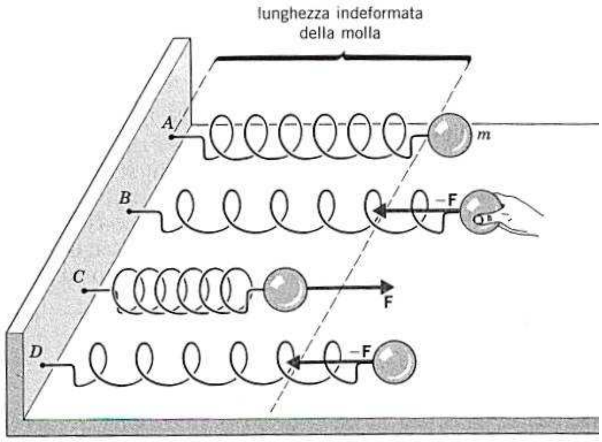
Curve di Potenziale

E' possibile mettere in grafico l'andamento del potenziale di una data forza

Forza Elastica
K = 3.5 N/m



$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



L'Energia potenziale della forza elastica è una parabola con un minimo nel punto ad allungamento zero. Un minimo di potenziale (anche relativo) indica un punto di equilibrio stabile del sistema. Un punto cioè dove il corpo non è soggetto a forze.

Obiettivi generali degli esercizi svolti in aula:

➔ **Saper calcolare il lavoro su un percorso rettilineo;**

➔ **Saper applicare il teorema dell'energia cinetica;**

➔ **Saper calcolare l'energia potenziale per alcune forze conservative (per esempio forza gravitazionale);**

➔ **Saper applicare il principio di conservazione dell'energia.**